最良評価付 L^2 割算定理と多重列調和関数の特徴付け

東京都立大学 理学研究科 数理科学専攻
高倉 真和 (Masakazu Takakura) *

概要

多変数関数論において古くから知られている Skoda 型 L^2 割算定理に最良評価を与えた．また この最良評価は多重列調和関数の特徴付けになっている．

1　背景

多変数関数論において, 領域の凸性と解析方程式の可解性の関係は興味深く研究されてきた．岡, Cartan, Stein, Hörmander らによる次の顕著な結果がある．

定理 1　1. 擬凸領域 Ω 上の解析的連接層 $\mathcal{F}$ に対して

$$H^q(\Omega, \mathcal{F}) = 0 \;\; (q > 0).$$

2. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を領域とする．Ω 上の任意の解析的連接層 $\mathcal{F}$ に対して

$$H^q(\Omega, \mathcal{F}) = 0 \;\; (q > 0).$$

ならば Ω は擬凸領域.

解析的連接層の高次コホモロジーは解析的方程式を解く上での幾何学的障害類を表している．したがって定理 1 は「可解性」と「領域の幾何学的な凸性」が等価であることを表している．一方で, Hörmander による $\bar{\partial}$–方程式の解に関する L^2–存在定理が示されて以降, 解析的な方程式は L^2 評価付で解けることが分かった．特に大沢–竹越の L^2 拡張定理はその代表例で, 複素幾何学において重要な役割を果たしている．近年 L^2 拡張定理の最良評価とその逆問題について著しい発展があった ([2, 4])．これは岡, Cartan, Stein, Hörmander らの結果の L^2–version である．つまり 「$L^2(\Omega, e^{-\phi})$ 評価付の可解性」と，「ϕ の多重劣調和性」が等価であることを示している．本研究では, L^2 割算定理に対して同様の問題を考えた.

Ω を $\mathbb{C}^n$ 上の領域とする．割算問題とは Ω 上の正則関数 $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{O}(\Omega)$ に対して $f = \sum h_i g_i$ $(*)$ を満たす正則関数 $h_1, \dots, h_r$ が存在するかという問いである. 岡潔 [1] は擬凸領域には $(*)$ を解く上での幾何学的な障害がないことを示した. つまり, 局所的に解が存在することと, 擬凸領域 Ω 上に大域的な解が存在することは同値である. これは代数的な判定法としては完全なものであるが, そもそも局所的な解の存在の判定が難しい．そこで Skoda は次の L^2-effective な判定法を示した.

* E-mail:takakura-masakazu@ed.tmu.ac.jp

定理 2（Skoda'72[3]） ϕ を Ω 上の多重劣調和関数, $q = \min(n-1, r)$, ϵ を正の実数とする．もし $(f, g_1, \ldots, g_r)$ が

$$I := \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2(q+1+\epsilon)} e^{-\phi} d\lambda < +\infty$$

を満たすなら $(*)$ の解が存在し,

$$J := \min_{h:(*)\text{ の解}} \int_\Omega |h|^2 |g|^{-2(q+\epsilon)} e^{-\phi} d\lambda \le (1 + q/\epsilon) I$$

を満たす. ここに $d\lambda$ はルベーグ測度である.

つまり, $|f|^2|g|^{-2(q+1+\epsilon)}$ の局所可積分性が $(*)$ の局所解の存在を保証する．定理 1 には Briancon–Skoda の定理や多重種数の変形不変性定理といった重要な応用が多く知られている．その後定理 2 の L^2 評価はさまざまな改良が行われてきたが, それらは等号成立の場合を含まないという意味で最良の評価ではない.

主結果

定理 2 の L^2 評価を改善し, 最良評価を与えた．これは近年の最良評価付 L^2 拡張定理の進展に影響を受けてのことである [4].

定義 1 集合 $\mathcal{G}$ は次の条件 (i),(ii),(iii) を満たす $\mathbb{R}_{\le 0}$ 上で定義された C^∞ 級の正の関数の組 $(C(t), D(t), S(t))$ の集まりである.

(i) $\frac{d}{dt} D(t) = -C(t)$

(ii) $\frac{d}{dt}(S(t)D(t)) = -D(t)$

(iii) $\frac{d}{dt} S(t) < 0$.

特に

$$\int_0^1 rD(\log r^2) dr < +\infty,$$

$$D(0) = 0$$

を満たす時, $(C, D, S) \in \mathcal{G}$ は sharp condition を満たすという.

注意 1 上記の (i),(ii),(iii) を満たす組 (C, D, S) は多くある．実際 $C(t)\colon \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}_{>0}$ を連続な非減少関数とし,

$$D(t) = \int_t^0 C(s) ds,$$

$$S(t) = \left(\int_t^0 D(s) ds \right) / D(t)$$

と定めると, $(C, D, S) \in \mathcal{G}$ となる.

次の補題は主結果の証明において重要な役割を果たす.

補題 1　$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を擬凸領域, (E, h) を中野の意味で正な Ω 上の正則ベクトル束とし (hogehoge) ϕ を Ω 上の負の多重劣調和関数とする．E に値を持つ $\bar{\partial}$–閉 $(0,1)$ 形式 v と $(C, D, S) \in \mathcal{G}$ に対して

$$\int_\Omega D(\phi)\,\mathrm{Tr}_{\partial\bar{\partial}\phi}\langle v \wedge \bar{v}\rangle_h d\lambda < +\infty$$

を満たすとする．このとき $\bar{\partial}u = v$ の解で

$$\int_\Omega C(\phi)|u|_h^2 d\lambda \leq \int_\Omega D(\phi)\,\mathrm{Tr}_{\partial\bar{\partial}\phi}\langle v \wedge \bar{v}\rangle_h d\lambda$$

を満たすものが存在する

この L^2 評価は次のような等号成立の場合を含む.

例 1　$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ とし, $\phi = |z|^2 - 1$, $(C, D, S) = (1, -t, -t/2)$ とする．

$$v = d\bar{z}$$

に対して $\bar{\partial}u = v$ の $L^2(\Omega)$ 最小解は $u = \bar{z}$ で, このとき

$$\int_{|z|<1} |u|^2 = \pi/2 = \int_{|z|<1} (1 - |z|^2) = \int_{|z|<1} (1 - |z|^2)\mathrm{Tr}_{dz\wedge d\bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

主定理 1　ϕ を擬凸領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上の多重劣調和関数とする. もし $f, g_1, \ldots, g_r$ が $\Phi := \log|g|^2 < 0$ および

$$I_{f,g} := \int_\Omega (C(\Phi) + qD(\Phi))|f|^2|g|^{-2(q+1)}e^{-\phi}d\lambda < +\infty$$

を満たすなら, $(*)$ の解が存在し,

$$J_{f,g} := \min_{h:(*)\text{ の解}} \int_\Omega C(\Phi)|h|^2|g|^{-2q}e^{-\phi}d\lambda \leq I_{f,g}$$

を満たす. ここに $d\lambda$ はルベーグ測度である.

主張に $S(t)$ が登場しないが, この定理の証明には (ii),(iii) を満たす S の存在が必要である.

例 2

1. $(C, D, S) = (e^{-\epsilon t}, (e^{-\epsilon t} - 1)/\epsilon, (e^{-\epsilon t} + \epsilon t - 1)/\epsilon(e^{-\epsilon t} - 1))$ とすると主結果 1 の L^2 評価は

$$\int_\Omega |h|^2|g|^{-2(q+\epsilon)}e^{-\phi}d\lambda \leq (1 + q/\epsilon)\int_\Omega |f|^2|g|^{-2(q+1+\epsilon)}e^{-\phi}d\lambda - q/\epsilon \int_\Omega |f|^2|g|^{-2(q+1)}e^{-\phi}$$

となる．これは定理 2 の評価を真に改善している．

2. $(C, D, S) = (e^{qt}, (1 - e^{qt})/q, (1 - e^{qt} + qt)/q(1 - e^{qt}))$ とすると主結果 1 の L^2 評価は

$$\int_\Omega |h|^2 e^{-\phi} \leq \int_\Omega |f|^2|g|^{-2(q+1)}e^{-\phi}$$

となる.

例 3　$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n |\ |z|^2 < 1\}$, $\phi = 0$, 複素定数 $a_1, \ldots, a_n$ に対し $(f, g_1, \ldots, g_n) = (a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n, z_1, \ldots, z_n)$ とすれば, $J_{f,g} = I_{f,g}$ が成立する.

以下 sharp condition を満たす (C,D,S) を 1 つ固定する.

定義 2　領域 Ω とその上の局所 L^1 可積分関数 ϕ を考える. $I_{f,g} < +\infty$ となる任意の正則関数の組 $(f, g_1, \ldots, g_n)$ に対して $J_{f,g} \leq I_{f,g}$ となるとき, (Ω, ϕ) は sharp L^2 division property を持つと言う.

主定理 1 は多重劣調和関数が sharp L^2 division property をもつことを示している. 次の結果はこの逆を主張している.

主定理 2　Ω を $\mathbb{C}^n$ 上の領域, ϕ を Ω 上の C^2 級関数とする.

(i) 任意の有界擬凸部分領域 $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ に対して, $(\widetilde{\Omega}, \phi)$ が sharp L^2 division property を持つとき, $(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} + \frac{\partial \phi}{\partial z^i}\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}^j})_{i,j}$ は半正定値.

(ii) 任意の有界擬凸部分領域 $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ と 多重調和関数 $\psi \in PH(\widetilde{\Omega})$ に対して, $(\widetilde{\Omega}, \phi + \psi)$ が sharp L^2 division property を持つとき, $(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j})_{i,j}$ は半正定値.

(iii) 任意の有界擬凸部分領域 $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ と任意の正の定数 ϵ に対して, $(\widetilde{\Omega}, \epsilon\phi)$ が sharp L^2 division property を持つとき, $(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j})_{i,j}$ は半正定値.

参考文献

[1] Kiyoshi Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques. Bull. Soc. Math. Fr., 78:1–27, 1950.

[2] F. Deng, Z. Wang, L. ZHANG, X. Zhou. New characterization of plurisubharmonic functions and positivity of direct image sheaves June 2024American Journal of Mathematics 146(3):751-768

[3] H. Skoda. Application des techniques L 2 à la théorie des ideaux dúne algèbre de fonctions holomorphes avec poids. Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4) , 5:545–579, 1972. 1

[4] Q. Guan, X. Zhou. A solution of an L^2 extension problem with an optimal estimate and applications. Ann. of Math. (2), 181(3):1139–1208, 2015.